

PENGUJIAN INTERCEP UNTUK *TESTS* TERKAIT *NON-SAMPLE PRIOR INFORMATION* PADA HIPOTESIS SATU ARAH PADA REGRESI LINIER SEDERHANA KETIKA VARIANSI DIKETAHUI

Budi Pratikno¹, Yuliatr Wirawidya Haryono²

Jurusan MIPA Matematika Unsoed Purwokerto
bpratikto@gmail.com

Abstract

This research discussed testing the intercept with non-sample prior information (NSPI) on the slope on a simple linear regression for known variance. The hypothesis used is one-side hypothesis (maximum), and the tests are unrestricted test (UT), restricted test (RT), and preliminary-test test (PTT). The method for choosing the best choice of the tests is a maximum power and minimum size. A simulation study and graphical analysis are given to make comparison of the tests. The result shown that the NSPI reduce the value of power, it means that the NSPI is not significant influence. However, PTT still lies between UT and RT for several intervals of λ_1 , so it will be a better choice than UT and RT.

Keywords: Linear model, power, and size.

A. PENDAHULUAN

Yunus dan Khan (2011) dan Pratikno (2012) menyatakan bahwa kualitas pengujian hipotesis pada kesimpulan populasi dapat ditingkatkan menggunakan *non-sample prior information* (NSPI). NSPI adalah informasi parameter populasi yang tidak terkait sampel, dan diperoleh dari studi sebelumnya atau pengetahuan para ahli. Bancroft (1944, 1964) adalah peneliti pertama yang menggunakan NSPI untuk estimasi parameter. Kemudian dilanjutkan oleh Bancroft dan Han (1968) dan Saleh (2006), dan lain-lain. Selanjutnya, Tamura (1965), Saleh dan Sen (1978, 1982), dan Yunus dan Khan (2011), menggunakan NSPI untuk *testing* hipotesis pada kasus non parametrik. Setelah itu Pratikno (2012) menggunakan NSPI untuk *testing* hipotesis pada kasus parametrik. Penelitian ini adalah pengembangan penelitian dari Pratikno (2012) yang diterapkan pada hipotesis *one-side hypothesis (maximum)* pada regresi linear sederhana untuk variansi diketahui (*known variance*). *Tests* yang terkait dengan NSPI dan akan digunakan adalah *unrestricted test* (UT), *restricted test* (RT), dan *pre-test test* (PTT).

Model yang digunakan untuk *testing intercept* dari *tests* tersebut adalah pada model regresi linier sederhana *for known variance*, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + e$, dimana Y adalah *response*, β_0 adalah parameter *intercept*, β_1 adalah parameter *slope*, X adalah *predictor*, dan e adalah *error term* yang berdistribusi normal. Estimator untuk β_0 dan β_1 adalah $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ dan

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n}}, \text{ dengan } \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \text{ dan } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ adalah rata-rata dari } Y_i \text{ dan } X_i.$$

Berkaitan dengan model regresi untuk *known variance*, maka distribusi UT, RT dan PTT untuk testing *one-side hypothesis* (maksimum) adalah distribusi normal dan *bivariate normal distribution*.

Power (kuasa) uji adalah peluang menolak hipotesis nol (H_0) ketika nilai parameter yang sebenarnya terletak pada *alternative hypothesis* (H_1), sedangkan *size* (ukuran) uji adalah nilai *power* ketika nilai parameter yang sebenarnya terletak pada H_0 . Kriteria yang digunakan adalah *tests* yang memiliki nilai *power* maksimum dan *size* minimum dipilih sebagai uji terbaik. *Software R* digunakan untuk menggambarkan grafik UT, RT dan PTT yang selanjutnya digunakan sebagai *graphically analysis*.

Pada bagian 2, dipresentasikan *proposed tests* dan modifikasinya. *Power* dan *size* dipaparkan pada bagian 3. Bagian 4 mempresentasikan simulasi studi dan plot UT, RT, dan PTT. Kesimpulan dan saran diberikan di bagian 5.

B. PROPOSED TESTS

1. UT

Mengacu pada Pratikno (2012), *test* terkait NSPI yang tidak terdapat dalam *slope* (β_1), pada $H_0 : \beta_0 = 0$ versus $H_1 : \beta_0 < 0$, adalah

$$T^{UT} = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \frac{\hat{\beta}_0 \sqrt{n}}{s_{\varepsilon} \left[1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right]^{1/2}}, \quad (2.1)$$

dengan $s_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2}$ (akar *mean square error* (MSE)) merupakan estimator dari variansi eror model regresi linear sederhana. Pada kasus demikian ini, *slope* diestimasi dari data sampel. *Test statistic* (statistik uji) Persamaan (2.1) mengikuti distribusi Student-*t* dengan derajat bebas ($n-2$). Pada Persamaan (2.1) $\frac{\hat{\beta}_0 \sqrt{n}}{s_{\varepsilon} \left[1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right]^{1/2}}$ dihitung dari data sampel.

Kemudian, misalkan $\{K_n\}$ sebagai rangkaian hipotesis alternatif (H_1), yaitu

$$K_n := (\beta_0 - b_0, \beta_1 - b_1) = \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda_2}{\sqrt{n}} \right) = n^{-1/2} \lambda.$$

Dalam hal ini, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (\beta_0 \sqrt{n}, (\beta_1 - b_1) \sqrt{n})$. Pada K_n , nilai $(\beta_0 - b_0) < 0$ dan $(\beta_1 - b_1) < 0$. Sementara itu, pada H_0 , nilai $(\beta_0 - b_0) = 0$ dan $(\beta_1 - b_1) = 0$. Selanjutnya, dimisalkan modifikasi statistik uji UT pada K_n berdistribusi *t* dengan derajat bebas ($n-2$), yaitu

$$\begin{aligned} T_1^{UT} &= T^{UT} - \left(\sqrt{n} (\beta_0) \left[s_{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}} \right]^{-1} \right) \\ &= T^{UT} - \frac{\lambda_1}{k}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan $k = s_{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}}$.

2. RT

Jika NSPI terdapat pada *slope* (diketahui/fixed), yaitu $\beta_1 = b_1$, maka *test* terkait NSPI yang digunakan adalah RT. Statistik uji untuk RT adalah

$$T^{RT} = \frac{\tilde{\beta}_0 - 0}{s_{\tilde{\beta}_0}} = \frac{\sqrt{n}\tilde{\beta}_0}{s_y}. \quad (2.3)$$

distribusi t dengan derajat bebas $(n-1)$. Selanjutnya, pada K_n , $(\beta_0 - b_0) < 0$ dan $(\beta_1 - b_1) < 0$, menurut Pratikno (2012) modifikasi statistik uji dari RT pada K_n adalah

$$\begin{aligned} T_2^{RT} &= T^{RT} - \frac{\beta_0 + (\beta_1 - b_1)\bar{X}}{\frac{s_y}{\sqrt{n}}} \\ &= T^{RT} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2\bar{X}}{s_y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. PTT

Jika NSPI terdapat pada *slope* (β_1) tetapi *uncertain* (diduga sebesar b_1), maka uji terkait NSPI yang digunakan adalah PTT. Pada PTT didahului dengan *pre-test* (PT), yaitu uji pada $H_0^* : \beta_1 = b_1$ vs $H_1^* : \beta_1 < b_1$, sedemikian hingga statistik uji PT adalah

$$T^{PT} = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{s_\varepsilon / \sqrt{S_{XX}}}, \quad (2.5)$$

dengan $S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ dan $s_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2}$. Jika H_0^* PT ditolak, maka gunakan

UT untuk menguji H_0 karena UT berkorelasi dengan PT, jika tidak demikian maka RT yang digunakan. Secara sama, Persamaan (2.5) berdistribusi Student- t dengan derajat bebas $(n-2)$. Secara jelas, bahwa PT dan UT berkorelasi, sedangkan PT dan RT tidak berkorelasi, sehingga kemudian *power* dan *size* dari PTT pada tingkat signifikansi α_3 diberikan sebagai kombinasi dari kondisi tersebut (Pratikno, 2012).

C. POWER AND SIZE

1. UT

Mengacu Pratikno (2012) dan Persamaan (2.2), *power* UT pada tingkat signifikansi α_1 , adalah

$$\begin{aligned} \pi_i^{UT}(\lambda_1) &= P(T^{UT} > t_{\alpha_1, n-2} | K_n) \\ &= 1 - P\left(T_1^{UT} \leq t_{\alpha_1, n-2} - \frac{\lambda_1}{k}\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Secara sama, *size* UT diberikan sebagai

$$\begin{aligned} \alpha_i^{UT} &= P(T^{UT} > t_{\alpha_1, n-2} | H_0 : \beta_0 = 0) \\ &= 1 - P(T_1^{UT} \leq t_{\alpha_1, n-2}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

2. RT

Selanjutnya, dengan menggunakan cara yang sama seperti pada UT, untuk tingkat signifikansi α_2 , maka diperoleh *power* and *size* RT sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\pi_t^{RT}(\lambda) &= P(T^{RT} > t_{\alpha_2, n-1} | K_n) \\ &= P\left(T_2^{RT} > t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\sqrt{n}(\beta_0 + (\beta_1 - b_1)\bar{X})}{s_y}\right) \\ &= 1 - P\left(T_2^{RT} \leq t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \bar{X}}{s_y}\right).\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\alpha_t^{RT} &= P(T^{RT} > t_{\alpha_2, n-1} | H_0 : \beta_0 = 0) \\ &= 1 - P\left(T_2^{RT} \leq t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\lambda_2 \bar{X}}{s_y}\right).\end{aligned}\quad (3.4)$$

3. PTT

Mengacu Pratikno (2012) dan kondisi UT dan PT (berkorelasi) dan RT dan PT (tidak berkorelasi) sebagaimana dinyatakan pada subbagian 2.3., maka *power* dan *size* dari PTT pada tingkat signifikansi α_3 diberikan sebagai

$$\begin{aligned}\pi_t^{PTT}(\lambda) &= P(T^{PT} > t_{\alpha_3, n-2}, T^{UT} > t_{\alpha_1, n-2}) + P(T^{PT} \leq t_{\alpha_3, n-2}, T^{RT} > t_{\alpha_2, n-1}) \\ &= m_{2\rho}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_1, n-2} - \frac{\lambda_1}{k}; \rho \neq 0\right) + \\ &\quad m_{10}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_2, n-1} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 \bar{X})}{s_y}; \rho = 0\right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Pada Persamaan (3.5), $m_{2\rho}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_1, n-2} - \frac{\lambda_1}{k}; \rho \neq 0\right)$ dan $m_{10}\left(t_{\alpha_3, n-2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{S_{XX}}}{s_\varepsilon \sqrt{n}}, t_{\alpha_2, n-1} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 \bar{X})}{s_y}; \rho = 0\right)$, adalah probabilitas *bivariat Student-t* yang didefinisikan dengan

$$m_{2\rho}(a_1, a_2; \rho \neq 0) = \int_{a_2}^{\infty} \int_{a_1}^{\infty} f(t^{PT}, t^{UT}) dt^{PT} dt^{UT} \quad (3.6)$$

dan

$$m_{10}(a_1, a_3; \rho = 0) = \int_{a_3}^{\infty} \int_{-\infty}^{a_1} f(t^{PT}, t^{RT}) dt^{PT} dt^{RT}, \quad (3.7)$$

dimana koefisien korelasi antara T^{UT} dan T^{PT} adalah $-1 < \rho < 1$. Secara sama, *size* dari PTT, dengan a_1, a_2 , dan a_3 bilangan riil, adalah

$$\begin{aligned}\alpha_t^{PTT} &= P(T^{PT} > a_1, T^{UT} > a_2 | H_0) + P(T^{PT} \leq a_1, T^{RT} > a_3 | H_0) \\ &= m_{2\rho}(t_{\alpha_3, n-2}, t_{\alpha_1, n-2}; \rho) + m_{10}\left(t_{\alpha_3, n-2}, t_{\alpha_2, n-1} - \frac{\lambda_2 \bar{X}}{s_y}; \rho = 0\right),\end{aligned}\quad (3.8)$$

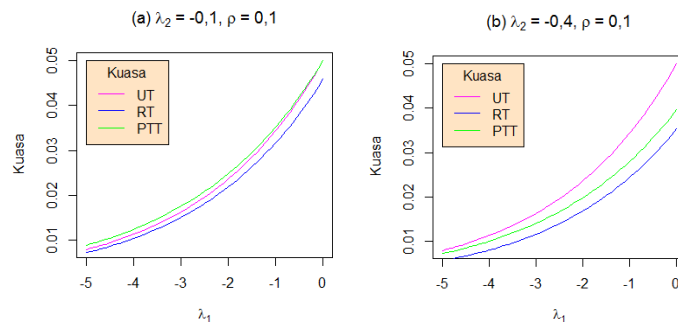
D. SIMULATION STUDY

Awal dari penelitian ini adalah akan menerapkan pada data riil yang memenuhi testing *one-side hypothesis* (maksimum), namun hal ini sulit dilakukan karena ketidak tersedianya data riil yang memenuhi kondisi tersebut. Selanjutnya, penelitian ini difokuskan pada data pembangkitan dari *R package* 13.0.1, dengan $\beta_0 = -10$, $\beta_1 = -5$, nilai X_i di *generate* dari

distribusi normal dengan *mean* 2 dan standar deviasi 3 (X_i tidak harus berdistribusi), dan ε_i dibangkitkan dari distribusi normal dengan $\mu = 0$ dan variansi $\sigma^2 = 1$.

Power of the Tests

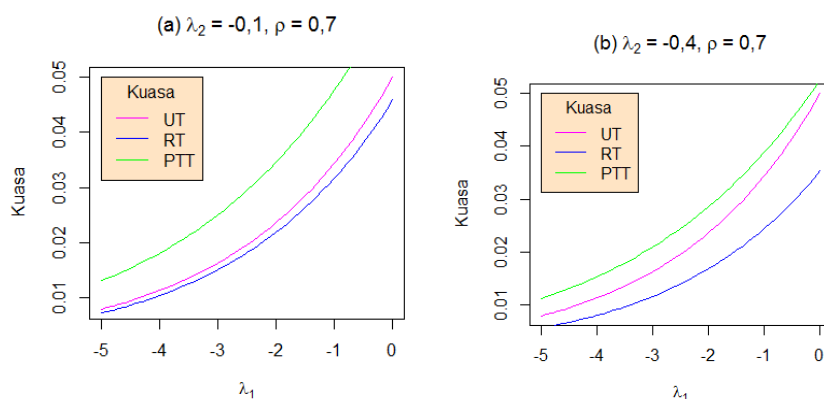
Grafik untuk *power* UT, RT, dan PTT dengan koefisien korelasi 0,1 dan nilai λ_2 (negatif) yang berbeda dipaparkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Kuasa dari UT, RT, dan PTT versus λ_1 dengan nilai λ_2 berbeda.

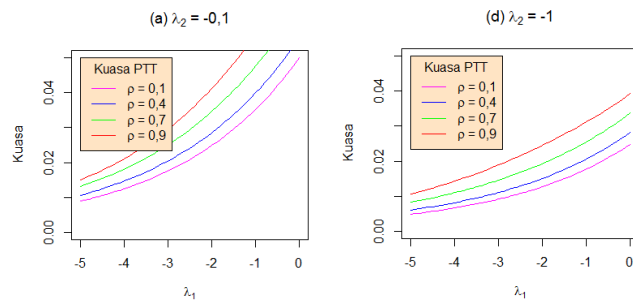
Grafik diatas (Gambar 4.1) menunjukan bahwa semakin besar nilai λ_1 , maka nilai kuasa dari UT semakin besar, dan UT tidak bergantung pada λ_2 . RT semakin besar sebagaimana nilai λ_1 , membesar, dan semakin kecil ketika nilai λ_2 semakin kecil. Hal ini berarti bahwa kuasa dari RT tidak maksimum dan cenderung tidak optimal. Sementara itu, PTT semakin besar sebagaimana λ_1 semakin besar, atau PTT semakin baik. Secara jelas, jika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ kuasa dari UT dan PTT selalu lebih besar daripada kuasa dari RT.

Gambar 4.2 di bawah ini adalah grafik kuasa dari UT, RT, dan PTT untuk nilai λ_2 negatif yang berbeda-beda dan $\rho = 0,7$.



Gambar 4.2. Kuasa dari UT, RT, dan PTT versus λ_1 dengan $\lambda_2 = -0,1; -0,4$ dan $\rho = 0,7$.

Gambar 4.2. menunjukan bahwa PTT terletak antara UT dan RT, sehingga PTT menjadi pilihan diantara keduanya. Hal ini berarti bahwa NSPI mempunyai pengaruh terhadap pilihan dari sebuah *test*. Dari kedua gambar tersebut terlihat bahwa RT bukan menjadi pilihan, sehingga penelitian ini masih mengikuti penelitian sebelumnya, yaitu PTT dan NSPI berpengaruh terhadap proses testing.

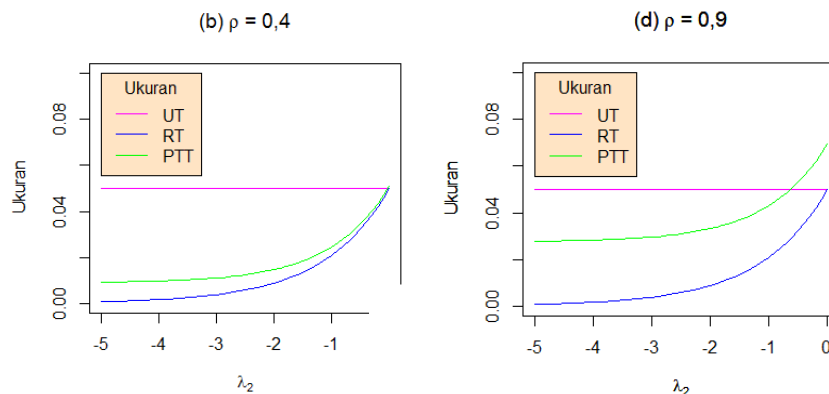


Gambar 4.3. Kuasa dari PTT versus λ_1 dengan $\lambda_2 = -0,1; -1$ dan $\rho = 0,1; 0,4; 0,7; 0,9$.

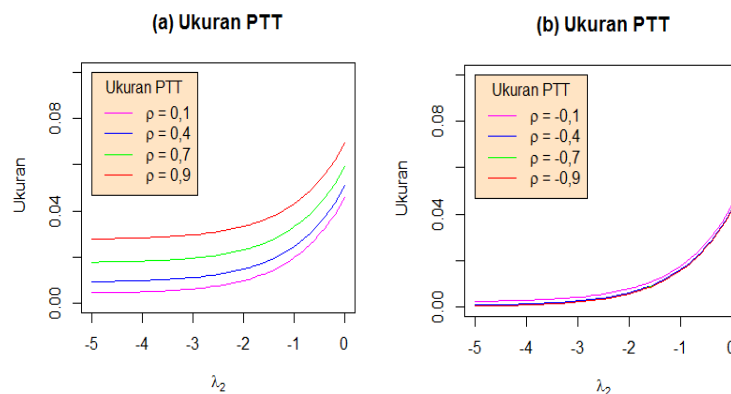
Gambar 4.1-4.3 dengan $\rho > 0$ menunjukkan bahwa grafik PTT berubah sebagaimana nilai ρ berubah, yaitu PTT semakin besar jika nilai ρ semakin besar. Simulasi grafik menunjukkan bahwa grafik kuasa dari UT, RT, dan PTT ketika $\rho < 0$ adalah *similar*.

Size of the Tests

Size of the tests (UT, RT, dan PTT) pada kasus ini disajikan pada Gambar 4.4 dibawah ini.

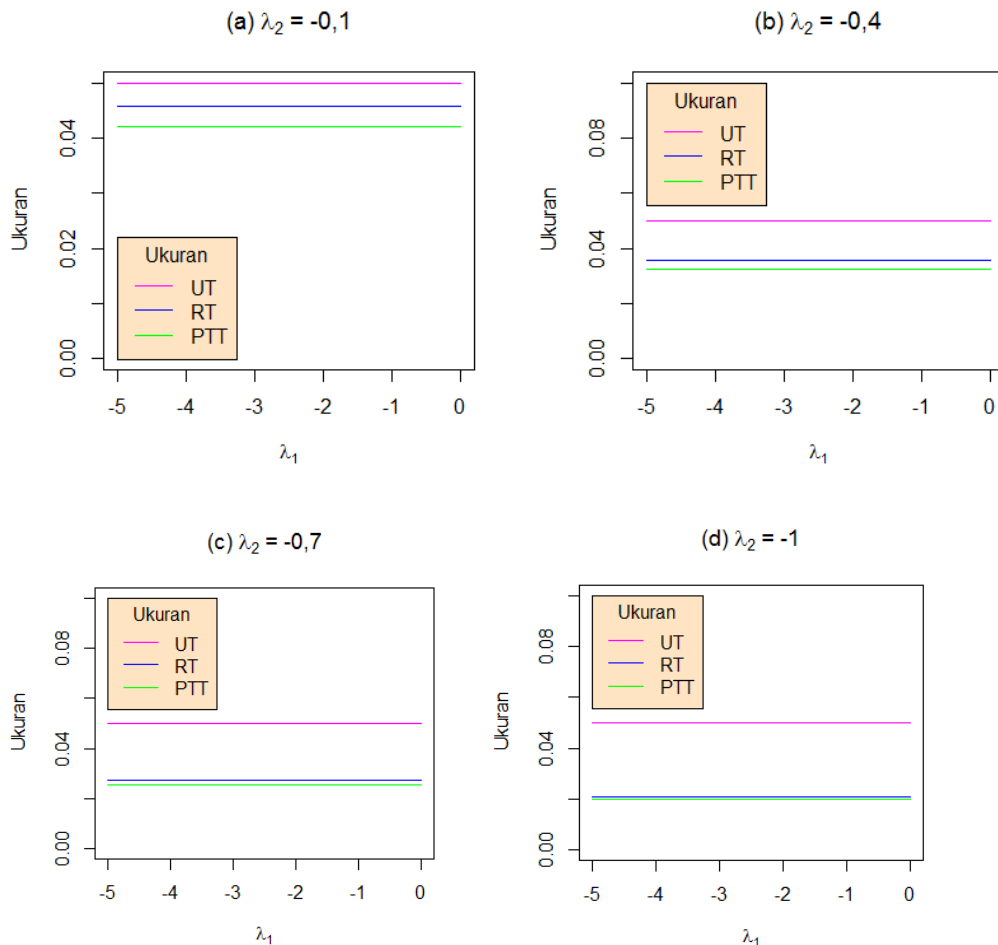


Berdasarkan Gambar 4.4, ukuran UT bernilai konstan karena tidak bergantung terhadap nilai λ_1 , λ_2 dan ρ , sedangkan ukuran RT bergantung terhadap nilai λ_2 , RT bertambah besar ketika nilai λ_2 bertambah besar. Kemudian, ukuran PTT bergantung terhadap nilai λ_2 dan ρ , dan tidak bergantung terhadap nilai λ_1 . Ukuran PTT bertambah besar ketika nilai λ_2 bertambah besar, demikian juga ketika nilai $\rho > 0$.



Gambar 4.5 Ukuran uji dari PTT versus λ_2 dengan $\rho = 0,1; 0,4; 0,7; \text{ dan } 0,9$ serta ukuran uji dari PTT versus λ_2 dengan $\rho = -0,1; -0,4; -0,7; \text{ dan } -0,9$.

Gambar 4.5 memberikan informasi bahwa semakin kecil nilai ρ , maka semakin kecil pula nilai kuasa dari PTT, dengan demikian tidak similar untuk koefisien korelasi positif dan negatif. Selanjutnya, disajikan grafik dengan sumbu x-nya adalah λ_1 agar dapat menggambarkan lebih jelas perbandingan besarnya ukuran uji dari UT, RT, dan PTT.



Gambar 4.6. Ukuran dari UT, RT, dan PTT versus λ_1 dengan $\lambda_2 = -0,1; -0,4; -0,7; \text{ dan } -1$.

Berdasarkan Gambar 4.6, nilai ukuran dari RT dan PTT bertambah kecil ketika nilai λ_2 lebih kecil, sedangkan ukuran uji dari UT selalu konstan. Ketika nilai $\lambda_2 < 0$, ukuran uji dari UT selalu lebih besar dari ukuran RT dan PTT.

E. SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Hasil riset menunjukkan bahwa nilai *power of the tests* (UT, RT dan PTT) relatif kecil, hal ini dapat dianggap bahwa ada indikator riset ini sedikit berbeda dengan *previous research*

(Pratikno, 2012) untuk kondisi $\lambda_1 < 0$. Kenyataan tersebut berkesan bahwa NSPI tidak berpengaruh terhadap pemilihan *tests* sebagaimana hasil pada penelitian sebelumnya untuk testing, $H_0 : \beta_0 = \beta_{00}$ versus $H_1 : \beta_0 > \beta_{00}$, dimana PTT menjadi pilihan terbaik daripada RT dan UT. Namun, secara konsep dan *graphical analysis* (mengabaikan besaran nilai *power*), hasil riset masih mengikuti konsep *testing* dengan menggunakan NSPI, yaitu PTT adalah pilihan terbaik dari kedua *tests* UT dan RT. Hal ini ditunjukkan bahwa nilai *power* dan size PTT cenderung terletak antara UT dan RT. Akhirnya, kita dapat menarik kesimpulan sederhana bahwa mengacu dari riset ini dan *previous research*, maka dapat dipahami bahwa NSPI sangat dekat pada aplikasi data riil yang cenderung positif.

Saran

Sebaiknya dicobakan pada data riil, yang kemudian dibandingkan relevansinya dengan teori, dan juga perlu dilakukan untuk berbagai variansi kajian secara teori hipotesis dan relevansinya.

F. DAFTAR PUSTAKA

- Bancroft, T.A. (1944). On Biases in Estimation Due to The Use of The Preliminary Tests of Significance. *Annals Of Mathematical Statistics*. **15**, 190-204.
- Bancroft, T.A. (1964). Analysis and Inference for Incompletely Specified Models Involving The Use of The Preliminary Test(s) of Significance. *Biometrics*, **20**(3), 427-442.
- Han, C.P. dan Bancroft, T.A. (1968). On Pooling Means When Variance Is Un-Known. *Journal of American Statistical Association*, **63**, 1333-1342.
- Pratikno, B. (2012). Tests of Hypotesis for Linear Regression Models with Non Sample Prior Information. Disertasi, University of Southern Queensland.
- Saleh, A. K. Md. E. (2006). Theory of Preliminary Test and Stein-Type Estimation with Applications. Wiley, New Jersey.
- Saleh, A.K. Md. E. dan Sen, P.K. (1997). Nonparametric Estimation of Location Parameter After a Preliminary Tests on Regression. *Annals of Statistical*, **6**, 154-168.00
- Saleh, A. K. Md. E. dan Sen, P.K. (1982). Nonparametric Tests for Location After Parameter a Preliminary Tests on Regression. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **12**(16), 1855-1872.
- Tamura, R. (1965). Nonparametric Inferences With a Preliminary Test. *Bull. Math. Stat.* **11**, 38-61.
- Yunus, R.M. dan Khan, S. (2011). Increasing Power Of The Test Through Pre-Test – A Robust Method. *Communications in Statistics – Theory and Method*, **40**, 581-597.